## №4-дәріс

## Векторлық және аралас көбейтінділері, олардың алгебралық және геометриялық қасиеттері.

### Векторлардың векторлық көбейтіндісі

**Анықтама 1.** $\bar{a}$ векторының $\bar{b}$ векторына векторлық көбейтіндісі деп төмендегі теңдіктерді қанағаттандыратын $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}; \bar{b}]$ векторын айтамыз:

1. 1. $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = ab\sin$, $\quad \alpha = \left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$, $\quad o \le \alpha \le \pi$ ,
2. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\quad \bar{c} \perp \bar{b}$
3. $\bar{c}$ векторының бағыты $\bar{c}$ векторының ұшынан қарағанда $\bar{a}$ векторынан $\bar{b}$ векторына дейінгі жақын ара қашықтық сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы болатындай $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларынан құралған жазықтыққа қарай бағытталған.

### Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

1. Егер $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, онда $\bar{a} \times \bar{b} = 0$ .
2. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b})$.

Векторлық көбейтіндінің координаталық формадағы өрнектелуін табалық. $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ болсын. Онда

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}).$$

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$, $\bar{i} \times \bar{k} = \bar{j}$ екенін ескерсек:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

аламыз.

Е с к е р т у . Векторларды векторлық көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Векторлардың коллинеарлығы

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \text{ немесе } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \left( R_2 : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} \right), \tag{2}$$

2. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданы

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| \qquad (3)$$

*Мысал 1.* ***a*** *= 2**i** +3**j**,* ***b*** *=* ***i*** *-4**j*** векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы ***i*** *(1, 0),* ***j****(0, 1)*- бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

**a*b** = (2**i** +3**j**)*( **i** -4**j**) = 2**i*** **i** +3**j***i** -8 **i** *j**-12**j*j** = -3**i** *j**-8**i** *j** = -11**i** *j** = **c**;
Sпар. = |**c**| = 11|**i*j**| = 11*1*1Sinπ /2 = 11.

*Мысал 2.* **a** = (0, 1, 0) және **b** = (2, -1, 3) векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{к} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{к} = \mathbf{c}$$

**c**(3, 0, -2), |**c**| = | **a** ***b**| = √9+0+4 = √13.

## Векторлардың аралас көбейтіндісі

**Анықтама 2.** $\bar{a}, \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\bar{a} \times \bar{b}$ және $\bar{c}$ векторларының скаляр көбейтіндісіне тең санды айтамыз, ол координаталық формада былай жазылады:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$ болғандықтан, аралас көбейтіндіні былай белгілейміз: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелипипедті қарастыралық . Онда $S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, ал $h = np_{\bar{d}}\bar{c}$, мұндағы $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$, және $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| np_{\bar{d}}\bar{c}$ болғандықтан $V = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right|$.

Е с к е р т у . Аралас көбейтіндінің көмегімен мыналар анықталады:

1. Үш вектордың компланарлығы

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

2. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелепипедтің көлемі

$$V = \left|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right| \qquad (5)$$

*Мысал 3.* **a** = 2 **i** +5**j**+7**k**, **b** = **i** +**j**-**k**, **c** = **i** +2**j**+2**k** векторлары компланар екендігін көрсет.

*Шешуі:*

Егер **a**, **b**, **c** компланар болса, онда **a bc** = 0.

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4+14-5-7+4-10 = 0.$$

Ендеше, **a**, **b, c** векторлары компланар.

*Мысал 4.* Пирамиданың төбелері берілген: $A(1,\ 2,3),\quad B(0,-1,1),\quad C(2,5,2),\quad D(3,0,-2)$ .

Табу керек:

1. $BAC$ бұрышын.
2. $ABC$ үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

*Шешуі:*

$\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}$ векторларын табалық:

$$\overline{AB}=(0-1,\ \ -1-2,\ 1-3\ )=(-1,-3,-2),\quad \overline{AC}=(1,3,-1),\quad \overline{AD}=(2,-2,-5)$$

1. $$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|}=\frac{-1\cdot1+(-3)\cdot3+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{-8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-1&-3&-2\\1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-2\\3&-1\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-1&-2\\1&-1\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}-1&-3\\1&3\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=9\bar{i}-3\bar{j}=(9,-3,0)$$

2. $$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{81+9}=\frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1&-3&-2\\1&3&-1\\2&-2&-5\end{vmatrix}=24.$$

3. $$V_{пир.}=\frac{1}{6}\cdot24=4.$$